Metamorfosi matematiche: teoria delle categorie e trasformazioni mitologiche

La struttura profonda delle trasformazioni

Quando Ovidio compose le sue *Metamorphoseon libri* nel primo secolo dopo Cristo, forse non immaginava che le trasformazioni narrate nei quindici libri del poema avrebbero trovato, quasi duemila anni dopo, un linguaggio matematico capace di catturarne la struttura profonda. La teoria delle categorie, sviluppata da Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane negli anni Quaranta del Novecento, offre un apparato concettuale straordinariamente adatto a formalizzare le metamorfosi mitologiche, rivelando parallelismi insospettati tra la matematica astratta e la narrazione mitologica.

Le metamorfosi ovidiane non sono semplici cambiamenti arbitrari, ma trasformazioni che preservano alcuni aspetti essenziali dell'identità pur modificandone radicalmente altri. Questa caratteristica le rende perfettamente analoghe ai morfismi della teoria delle categorie, dove una funzione, un'applicazione lineare o un omomorfismo conservano determinate strutture mentre operano trasformazioni profonde. Il presente trattato esplora sistematicamente questa corrispondenza, mostrando come concetti matematici avanzati quali funtori, trasformazioni naturali, automorfismi e kernel di morfismi illuminino aspetti fondamentali delle trasformazioni mitologiche e, reciprocamente, come le intuizioni poetiche di Ovidio anticipino problematiche filosofiche e matematiche ancora oggi al centro del dibattito contemporaneo.

Fondamenti categoriali delle metamorfosi

La categoria come universo ontologico

Una categoria **C** è costituita da una collezione di oggetti Ob(**C**) e, per ogni coppia di oggetti X e Y, da un insieme di morfismi Hom(X,Y) che soddisfano due assiomi fondamentali: l'esistenza di un'operazione di composizione associativa e l'esistenza di morfismi identità. Nel contesto delle metamorfosi mitologiche, possiamo costruire diverse categorie dove gli oggetti rappresentano stati ontologici e i morfismi rappresentano trasformazioni possibili.

Consideriamo la categoria **Mit** le cui classi di oggetti includono **Umano**, **Animale**, **Pianta**, **Elemento** (inteso come fuoco, acqua, aria, terra), **Astro** (stelle, costellazioni), **Pietra** e **Divinità**. I morfismi in questa categoria sono le trasformazioni metamorfiche narrate nei miti. Ad esempio, la trasformazione di Dafne in alloro costituisce un morfismo μ_Dafne: **Umano** → **Pianta**, mentre la trasformazione di Licaone in lupo definisce un morfismo λ_Licaone: **Umano** → **Animale**.

La struttura categoriale emerge chiaramente quando consideriamo che le metamorfosi non sono eventi isolati ma possono essere composte. Se Io viene trasformata prima in giovenca (morfismo ι_1: **Umano** → **Animale**) e successivamente Argo, che la sorvegliava, viene trasformato in pavone (morfismo α: **Umano** → **Animale**), possiamo considerare la composizione di trasformazioni all'interno di una narrazione più ampia. L'associatività della composizione riflette il fatto che l'ordine di applicazione di trasformazioni successive è determinato dalla struttura causale del mito, non da convenzioni arbitrarie.

L'esistenza di morfismi identità id_X: X → X per ogni oggetto X corrisponde alla possibilità teorica che un ente rimanga immutato. Nella mitologia greca, questa condizione è rara ma significativa: rappresenta la stabilità ontologica che contrasta drammaticamente con l'instabilità delle metamorfosi. Gli dèi olimpici, ad esempio, mantengono prevalentemente la propria identità (sebbene possano assumere temporaneamente altre forme), costituendo così punti fissi nella topologia mitica.

Funtori metamorfici: preservazione di struttura attraverso il cambiamento

Un funtore F: **C** → **D** tra due categorie è un'applicazione che manda oggetti di **C** in oggetti di **D** e morfismi di **C** in morfismi di **D**, preservando composizione e identità. Nel contesto delle metamorfosi, possiamo interpretare le diverse modalità di trasformazione come funtori distinti.

Consideriamo il funtore della *metamorfosi punitiva* F_p: **Mit** → **Mit**. Questo funtore manda la categoria **Umano** nella categoria delle forme degradate (**Animale**, **Pietra**, **Pianta**) in base alla natura della trasgressione commessa. Licaone, che serve carne umana a Zeus, viene trasformato in lupo: F_p(Licaone) = Lupo. La struttura morale viene preservata attraverso una corrispondenza simbolica: la ferocia bestiale del comportamento si traduce nella forma bestiale del corpo. Il funtore preserva quindi una struttura etica latente, mappando vizi umani in attributi animali corrispondenti.

Un secondo funtore fondamentale è quello della *metamorfosi salvifica* F_s: **Mit** → **Mit**, che trasforma vittime di persecuzione in forme che garantiscono la fuga o l'immortalità. Dafne, inseguita da Apollo, viene trasformata in alloro: F_s(Dafne) = Alloro. Qui il funtore preserva la struttura del desiderio di autonomia e purezza della ninfa, traducendola nella forma vegetale sempreverde che diventerà simbolo apollineo. Le Pleiadi, inseguite da Orione, vengono trasformate nella costellazione omonima: F_s(Pleiadi) = Costellazione. Il funtore preserva la relazione sociale tra le sorelle, mantenendole raggruppate nella volta celeste.

Un terzo funtore di particolare interesse è quello della *metamorfosi per lutto* F_l: **Mit** → **Mit**, che trasforma il dolore insostenibile in una forma che lo eternizza. Ciparisso, addolorato per aver ucciso accidentalmente il cervo amato, viene trasformato in cipresso: F_l(Ciparisso) = Cipresso. Il funtore conserva la qualità del dolore nell'attributo simbolico dell'albero (il cipresso come albero funerario nella cultura mediterranea). Alcione, trovando il corpo annegato dello sposo Ceice, viene trasformata con lui in coppia di uccelli marini: F_l(Alcione, Ceice) = (Alcione_uccello, Ceice_uccello). Qui il funtore preserva non solo l'identità individuale ma anche la relazione coniugale, mappandola nella monogamia degli alcionidi.

Proprietà funtoriali e loro significato narrativo

La proprietà fondamentale di un funtore F: **C** → **D** è che preservi la composizione: F(g ◦ f) = F(g) ◦ F(f). Nel contesto metamorfico, questo significa che se una trasformazione è la composizione di due trasformazioni successive, il funtore deve rispettare questa struttura temporale. Consideriamo la storia di Io: la trasformazione in giovenca (μ_1: Io_umana → Io_giovenca) seguita dalla restituzione parziale della forma umana (μ_2: Io_giovenca → Io_restaurata) costituisce una composizione $\mu_2 \circ \mu_1$. Un funtore che descrive questa sequenza deve preservare l'ordine causale: la restituzione presuppone la trasformazione precedente.

L'altra proprietà fondamentale è la preservazione dell'identità: F(id_X) = id_F(X). Questo significa che un ente che non subisce trasformazione nell'universo mitico non deve subire trasformazione nemmeno nella rappresentazione funtoriale. Questa proprietà garantisce che il funtore rispetti i punti di stabilità ontologica nel sistema mitologico.

Esistono funtori particolarmente significativi dal punto di vista strutturale. Un funtore *fedele* (faithful) è iniettivo sui morfismi: se F(f) = F(g) allora f = g. Nella mitologia, questo corrisponde all'unicità della trasformazione: non esistono due metamorfosi distinte che producano esattamente lo stesso risultato. Un funtore *pieno* (full) è suriettivo sui morfismi: per ogni morfismo h: F(X) → F(Y) esiste un morfismo f: X → Y tale che F(f) = h. Un funtore pieno e fedele è un'*equivalenza* se è anche essenzialmente suriettivo sugli oggetti, stabilendo una corrispondenza biunivoca tra le strutture delle due categorie.

Nel contesto ovidiano, potremmo chiederci se il funtore della metamorfosi punitiva F_p sia fedele. La risposta è complessa: da un lato, ogni trasgressione specifica produce una trasformazione specifica (Aracne tesse meglio di Atena e diventa ragno, le figlie di Minias rifiutano i riti dionisiaci e diventano pipistrelli), suggerendo fedeltà. Dall'altro, esistono casi in cui trasgressioni diverse producono trasformazioni simili (diversi mortali vengono trasformati in uccelli per varie ragioni), suggerendo che il funtore non sia perfettamente fedele. Questa ambiguità riflette la natura stessa della giustizia divina nel mito, che non è algoritmica ma risponde a una logica simbolica più sottile.

Le categorie ontologiche della mitologia classica

La categoria Umano e le sue sottocategorie

All'interno della categoria **Mit**, l'oggetto **Umano** non è monolitico ma strutturato in sottocategorie che riflettono le distinzioni sociali e ontologiche della cultura greco-romana. Possiamo identificare una decomposizione in prodotto fibrato:

Umano ≅ Mortale ⊔ Semidio ⊔ Eroe

dove il simbolo ⊔ denota la somma disgiunta categoriale (coproduct). Questa decomposizione è rilevante perché le metamorfosi si comportano diversamente su queste sottocategorie. I mortali comuni subiscono solitamente trasformazioni irreversibili, mentre eroi e semidei possono talvolta accedere a trasformazioni parzialmente reversibili o a metamorfosi che preservano maggiore agentività.

All'interno di **Mortale**, possiamo ulteriormente distinguere:

Mortale ≅ Uomo × Donna × Status sociale × Virtù/Vizio

dove × denota il prodotto categoriale. Questa struttura prodotto riflette il fatto che l'identità umana nella mitologia è determinata da molteplici coordinate simultanee. La categoria **Status sociale** include oggetti come **Re**, **Pastore**, **Tessitrice**, **Cacciatore**, e lo status influenza profondamente il tipo di metamorfosi accessibile. Atteone, nobile cacciatore, viene trasformato in cervo (preda nobile); Aracne, tessitrice mortale, viene trasformata in ragno (tessitore di tele); Licaone, re empio, diventa lupo (predatore regale nella sua ferocia).

La componente **Virtù/Vizio** è particolarmente interessante dal punto di vista categoriale perché determina la direzione del funtore metamorfico. Possiamo definire una mappa di valutazione morale:

ε: **Umano** → **Z**

dove **Z** è la categoria degli interi con l'ordinamento naturale, e ε assegna a ciascun personaggio un "valore morale" che determina se la metamorfosi sarà ascendente (verso forme più elevate, come stelle o alberi sacri), discendente (verso forme degradate, come lupi o pietre), o neutra (trasformazioni che preservano il livello ontologico).

La categoria Animale e la tassonomia simbolica

La categoria **Animale** in Ovidio non corrisponde alla tassonomia biologica linneana (che verrà sviluppata solo nel XVIII secolo) ma a una tassonomia simbolica che riflette attributi morali e psicologici. Possiamo strutturare questa categoria attraverso un insieme di funtori dimensionali:

F_ferocia: **Animale** → [0,1] F_nobiltà: **Animale** → [0,1] F_fedeltà: **Animale** → [0,1] F_trasformabilità: **Animale** → [0,1]

dove [0,1] rappresenta la categoria dell'intervallo unitario con l'ordinamento standard. Ogni animale viene caratterizzato da un punto nello spazio prodotto $[0,1]^4$. Il lupo ha coordinate approssimativamente (0.9, 0.3, 0.2, 0.7): alta ferocia, media nobiltà, bassa fedeltà, alta trasformabilità (la licantropia). Il cigno ha coordinate approssimativamente (0.1, 0.8, 0.7, 0.9): bassa ferocia, alta nobiltà, alta fedeltà, altissima trasformabilità (Zeus assume frequentemente questa forma). L'aquila: (0.7, 0.95, 0.6, 0.8), animale di Zeus con alta nobiltà e ferocia regale.

Questa caratterizzazione multidimensionale spiega perché certi morfismi **Umano** → **Animale** siano più "naturali" di altri. Esiste un funtore di distanza simbolica:

d: **Umano** × **Animale** → $\mathbf{R}_+$

che misura la "distanza ontologica" tra un carattere umano e una forma animale. Le metamorfosi più drammatiche sono quelle per cui d è piccola: Licaone, già bestiale nel comportamento, ha distanza minima dal lupo. Atteone, cacciatore che viola lo spazio sacro,

ha distanza minima dal cervo (inversione predatore-preda). Aracne, tessitrice ossessiva, ha distanza minima dal ragno.

La categoria Pianta e l'immortalità vegetale

La categoria **Pianta** ha caratteristiche categoriali distintive che la rendono particolarmente interessante per le metamorfosi salvifiche e di lutto. A differenza della categoria **Animale**, che preserva movimento e percezione (seppure alterati), la categoria **Pianta** implica perdita di mobilità ma acquisizione di una forma di immortalità passiva.

Possiamo definire un funtore di radicamento:

R: **Pianta** → **Spazio**

dove **Spazio** è la categoria degli spazi topologici, e R manda ogni pianta nella regione spaziale in cui è radicata. Questo funtore cattura l'essenza della metamorfosi vegetale: la perdita della libertà di movimento è compensata da una connessione profonda con un luogo specifico. Dafne diventa alloro presso le rive del fiume Peneo, Ciparisso diventa cipresso a Cartha, le Eliadi diventano pioppi lungo l'Eridano. La posizione non è accidentale ma essenziale: il luogo della trasformazione diventa parte dell'identità trasformata.

Esiste inoltre un funtore di ciclicità temporale:

T: **Pianta** → $\mathbf{S}^1$

dove $\mathbf{S}^1$ è il cerchio (categoria ciclica), che cattura il fatto che le piante sono soggette ai cicli stagionali. Questo introduce una dimensione temporale nelle metamorfosi vegetali assente in quelle animali o minerali. Le Eliadi, trasformate in pioppi mentre piangono la morte di Fetonte, producono ambra dalle loro lacrime in un ciclo eterno. Fillide, trasformata in mandorlo dopo essersi impiccata credendo abbandonata da Demofoonte, fiorisce quando Demofoonte ritorna e abbraccia l'albero, istituendo un ciclo annuale di fioritura-memoria.

La categoria Elemento e la dissoluzione nell'indifferenziato

Le trasformazioni in elementi (**Fuoco**, **Acqua**, **Aria**, **Terra**) rappresentano il limite estremo della metamorfosi, dove l'identità individuale si dissolve quasi completamente nell'indifferenziato. Dal punto di vista categoriale, possiamo considerare **Elemento** come una categoria terminale rispetto ad altre forme: esistono morfismi da qualsiasi categoria verso **Elemento**, ma pochi o nessun morfismo da **Elemento** verso categorie più strutturate.

Fetonte, dopo la caduta del carro solare, viene fulminato e precipita nell'Eridano, trasformandosi in una serie di fenomeni elementali: il corpo diventa fuoco e cenere, le sorelle (Eliadi) che lo piangono diventano acqua-ambra e piante. C'è qui una dispersione categoriale: un singolo oggetto (**Fetonte**) viene mappato da un funtore metamorfico in un prodotto di oggetti appartenenti a categorie diverse:

F_dispersione(Fetonte) = Fuoco × Cenere × Acqua_Eridano × Ambra × Pioppi

Questa dispersione rappresenta una forma di morte categoriale: l'oggetto originale cessa di esistere come unità e viene distribuito su molteplici registri ontologici. È la forma più completa di perdita di identità, dove nemmeno la forma (shape) viene preservata.

Trasformazioni come morfismi: analisi formale

Morfismi e preservazione strutturale

Nella teoria delle categorie, un morfismo f: X → Y è molto più di una semplice "freccia" tra oggetti: è una trasformazione che preserva la struttura rilevante per la categoria in questione. In una categoria di gruppi, i morfismi sono omomorfismi di gruppo; in una categoria di spazi topologici, sono funzioni continue; in una categoria di insiemi ordinati, sono funzioni monotone.

Nel contesto della categoria **Mit**, dobbiamo chiederci: quale struttura preservano le metamorfosi? La risposta non è univoca ma dipende dal tipo di metamorfosi considerata. Possiamo identificare diverse strutture che possono essere preservate o perse:

1. **Memoria e continuità psicologica**: Alcune metamorfosi preservano la consapevolezza e la memoria. Io, trasformata in giovenca, mantiene la mente umana e può comunicare con il padre Inaco tracciando lettere nella sabbia con lo zoccolo. Atteone, trasformato in cervo, comprende il proprio orribile destino mentre i propri cani lo sbranano. In termini categoriali, possiamo definire un funtore di memoria M: **Mit** → **Coscienza** dove **Coscienza** è una categoria i cui oggetti sono stati mentali. Una metamorfosi μ: X → Y preserva la memoria se M(μ) è un isomorfismo, cioè M(X) ≅ M(Y).

2. **Relazioni sociali**: Le Pleiadi, trasformate in costellazione, mantengono la loro relazione di sorellanza nella configurazione spaziale delle stelle. Le Eliadi, trasformate in pioppi, rimangono raggruppate lungo lo stesso fiume. Possiamo definire un funtore di relazione R: **Mit** → **Grafi** dove **Grafi** è la categoria dei grafi orientati. Due metamorfosi μ_1: $X_1 \to Y_1$ e μ_2: $X_2 \to Y_2$ preservano una relazione sociale se esiste un morfismo di grafi che connette $R(X_1, X_2)$ a $R(Y_1, Y_2)$.

3. **Capacità e funzioni**: Aracne, trasformata in ragno, mantiene (anzi, perfeziona) la capacità di tessere. Fillomela, trasformata in usignolo dopo che le è stata tagliata la lingua, acquisisce la capacità di "cantare" il proprio dolore. Tereo, trasformato in upupa, mantiene l'aggressività predatoria. Possiamo definire un funtore di capacità C: **Mit** → **Set_funzioni** dove gli oggetti sono insiemi di azioni possibili. Una metamorfosi preserva o traduce una capacità se C(μ) mappa la capacità originaria in una forma analoga.

4. **Forma e morfologia**: Questa è la struttura più ovviamente trasformata. Definendo un funtore di forma S: **Mit** → **Spazi_topologici**, la maggior parte delle metamorfosi sono rappresentate da S(μ) che è un omeomorfismo molto debole (in senso tecnico, raramente è un'isometria o anche solo un diffeomorfismo). La ninfa Dafne ha topologia di varietà tridimensionale di genere zero; l'alloro ha topologia arborescente

(grafo connesso aciclico). Non c'è preservazione topologica in senso stretto, ma c'è una traduzione simbolica: la verticalità della postura umana diventa la verticalità del tronco, le braccia distese diventano rami, i capelli diventano foglie.

Monomorfismi ed epimorfismi nelle metamorfosi

Nella teoria delle categorie, esistono due tipi speciali di morfismi: i monomorfismi (generalizzazione delle funzioni iniettive) e gli epimorfismi (generalizzazione delle funzioni suriettive). Un morfismo $f: X \to Y$ è un monomorfismo se per ogni coppia di morfismi $g, h: Z \to X$, l'equazione $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$. Un epimorfismo soddisfa la condizione duale.

Le metamorfosi ovidiane sono prevalentemente monomorfismi: ciascuna è unica e non cancellabile. Se due trasformazioni μ_1 e μ_2 partono dallo stesso oggetto X e producono lo stesso risultato composte con una metamorfosi μ, allora $\mu_1 = \mu_2$. In termini narrativi: ogni metamorfosi ha una causa specifica e non ci sono due storie diverse che producono la stessa trasformazione nello stesso personaggio.

Sono invece raramente epimorfismi: non tutte le forme finali sono raggiungibili da qualsiasi forma iniziale. Non tutti gli animali sono accessibili tramite metamorfosi da umano (non ci sono metamorfosi in insetti sociali come formiche o api presso Ovidio, con la parziale eccezione delle Mirmidoni che nascono da formiche ma attraverso generazione, non metamorfosi diretta). Questa asimmetria riflette una gerarchia ontologica sottostante: le trasformazioni seguono preferenzialmente la direzione alto → basso (umano → animale, vivo → pietra) piuttosto che basso → alto.

Isomorfismi e reversibilità delle trasformazioni

Un morfismo $f: X \to Y$ è un isomorfismo se esiste un morfismo inverso $g: Y \to X$ tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Gli isomorfismi rappresentano trasformazioni completamente reversibili che preservano tutta la struttura categoriale.

Le metamorfosi ovidiane sono quasi mai isomorfismi. Una volta che Dafne diventa alloro, non esiste una metamorfosi inversa che la riporti alla forma umana. Questa irreversibilità è fondamentale per la tragicità delle trasformazioni. Tuttavia, esistono casi parziali di reversibilità che meritano analisi:

Casi di pseudo-reversibilità:

1. **Io**: trasformata in giovenca da Giove, viene parzialmente restaurata nella forma umana, ma il processo non è una vera inversione. La Io restaurata non è identica alla Io originaria: ha attraversato l'esperienza della trasformazione e porta i segni psicologici di questa traversata. In termini categoriali, la composizione $\mu_{restauro} \circ \mu_{trasformazione} \neq id_{Io}$. Ciò che otteniamo è piuttosto un oggetto Io' che è isomorfo a Io in alcune componenti ma non in tutte.

2. **Trasformazioni divine temporanee**: quando Zeus si trasforma in toro per rapire Europa, in cigno per Leda, in pioggia d'oro per Danae, queste sono trasformazioni reversibili. Possiamo interpretarle come coniugazioni: se μ: Zeus → Forma_X è la

trasformazione, esiste μ^{-1}: Forma_X → Zeus tale che $\mu^{-1} \circ \mu = id_Zeus$. Queste trasformazioni divine sono isomorfismi perché gli dèi non perdono la propria identità essenziale durante la metamorfosi: la trasformazione è un velamento temporaneo, non una ristrutturazione ontologica.

3. **Metamorfosi stagionali**: Persefone passa sei mesi nell'Ade e sei mesi sulla terra, in una trasformazione ciclica che potrebbe essere rappresentata come un'azione del gruppo Z_2: a ogni semestre corrisponde una trasformazione μ: Persefone_terrestre ⇄ Persefone_ctonia. Questa è una situazione più complessa: non è un vero isomorfismo (le due forme non sono identiche) ma nemmeno una trasformazione irreversibile. È piuttosto un'azione di gruppo, come discuteremo più avanti.

L'assenza generalizzata di isomorfismi nelle metamorfosi riflette una verità profonda sulla temporalità e il cambiamento: il tempo è una freccia, non un ciclo perfettamente reversibile. La metamorfosi è ontologicamente irreversibile perché il tempo lo è.

Endorfismi e la possibilità della trasformazione interna

Un endorfismo è un morfismo $f: X \to X$, cioè una trasformazione di un oggetto in sé stesso. Gli endorfismi sono particolarmente interessanti perché rappresentano trasformazioni che non cambiano la categoria ontologica ma modificano stati interni.

Nella mitologia classica, gli endorfismi sono relativamente rari ma significativi:

1. **Maturazione e invecchiamento**: Titone, reso immortale ma non eternamente giovane, subisce un endorfismo temporale continuo f_t: Titone → Titone che lo trasforma progressivamente in una creatura sempre più decrepita, fino a diventare una cicala. Questo è un endorfismo della categoria **Umano** seguito da una metamorfosi **Umano** → **Animale**. Il punto cruciale è che l'endorfismo non è l'identità: $id_Titone \neq f_t(Titone)$ per $t > 0$.

2. **Trasformazioni psicologiche senza metamorfosi fisica**: Medea, attraverso le sue azioni progressivamente più empie (tradimento del padre, omicidio del fratello, infanticidio), subisce una trasformazione morale che potrebbe essere rappresentata come una sequenza di endorfismi nella categoria **Carattere_morale**. Sebbene non ci sia metamorfosi fisica ovidiana di Medea, la sua trasformazione psicologica è così radicale che possiamo considerarla una serie di endorfismi non banali.

3. **Ringiovanimento**: Medea ringiovanisce Esone (padre di Giasone) e poi Pelia, operando endorfismi della categoria **Umano** che invertono la freccia temporale standard. Questi sono endorfismi particolarmente potenti perché apparentemente violano la direzione naturale del tempo biologico.

Un concetto correlato è quello di **automorfismo**: un endorfismo che è anche un isomorfismo, cioè una trasformazione reversibile di un oggetto in sé stesso. Gli automorfismi formano un gruppo (il gruppo degli automorfismi) e rappresentano le simmetrie dell'oggetto.

La licantropia, che esamineremo in dettaglio, è un esempio perfetto di automorfismo periodico.

Identità personale attraverso la trasformazione

Il problema filosofico: persistenza attraverso il cambiamento radicale

La questione dell'identità personale attraverso la metamorfosi solleva uno dei problemi filosofici più antichi e persistenti: cosa rende un ente lo "stesso" ente attraverso trasformazioni radicali? Questa questione, che nel contesto della filosofia analitica contemporanea è nota come il problema della "persistenza temporale" degli oggetti, trova nella mitologia ovidiana una formulazione particolarmente acuta perché le trasformazioni non sono graduali ma catastrofiche.

Quando Dafne diventa alloro, in che senso l'alloro è ancora Dafne? Quando Atteone diventa cervo, in che senso il cervo è ancora Atteone? La risposta a queste domande dipende dalla nostra concezione dell'identità. Possiamo distinguere almeno tre approcci principali, ciascuno con una formulazione categoriale corrispondente:

1. Identità sostanziale: secondo questa concezione (aristotelica e scolastica), l'identità risiede in una sostanza immutabile che persiste attraverso i cambiamenti accidentali. In termini categoriali, potremmo definire un funtore di sostanza Σ: **Mit** $\rightarrow$ **Sostanze** che mappa ogni oggetto della categoria mitologica nella sua sostanza essenziale. Una metamorfosi $\mu: X \rightarrow Y$ preserva l'identità se $\Sigma(X) = \Sigma(Y)$. Secondo questo criterio, la maggior parte delle metamorfosi ovidiane costituiscono perdite di identità, perché la sostanza umana e la sostanza animale (o vegetale) sono ontologicamente distinte. Solo le trasformazioni divine temporanee preserverebbero la sostanza (la sostanza divina di Zeus rimane identica anche quando assume forma di toro).

2. Identità psicologica: secondo questa concezione (lockiana e neo-lockiana), l'identità risiede nella continuità della coscienza, memoria e carattere psicologico. Definendo un funtore di continuità psicologica Ψ: **Mit** $\rightarrow$ **Stati_mentali**, una metamorfosi preserva l'identità se $\Psi(\mu)$ è un morfismo che mantiene le connessioni di memoria e la struttura psicologica. Io, che mantiene la mente umana nel corpo di giovenca, preserva l'identità psicologica. Atteone, che comprende la propria trasformazione mentre viene divorato, mantiene una tragica continuità psicologica. Al contrario, Licaone, che perde progressivamente la ragione umana e acquisisce istinti lupeschi, subisce una discontinuità psicologica.

3. Identità narrativa: secondo questa concezione (influenzata da Ricoeur e MacIntyre), l'identità risiede nella continuità della narrazione che unifica la vita di un ente come una storia coerente. In termini categoriali, definiamo un funtore di narrazione N: **Mit** $\rightarrow$ **Storie** dove **Storie** è una categoria i cui oggetti sono narrazioni e i cui morfismi sono relazioni di continuità narrativa. Una metamorfosi preserva l'identità narrativa se l'oggetto trasformato rimane parte della stessa storia causalmente e tematicamente connessa. Tutte le metamorfosi ovidiane preservano l'identità narrativa per definizione: Dafne-alloro è ancora parte della storia di Dafne, Aracne-ragno è ancora parte della storia di Aracne. La metamorfosi è l'apice drammatico della narrazione, non la sua interruzione.

Ship of Theseus: identità e sostituzione componenziale

Il paradosso della nave di Teseo, tramandato da Plutarco, fornisce un modello formale per comprendere l'identità attraverso il cambiamento graduale. La nave con cui Teseo ritorna da Creta viene preservata dagli Ateniesi, che sostituiscono progressivamente ogni tavola e ogni componente che marcisce. Alla fine, nessun pezzo originale rimane. È ancora la nave di Teseo?

Possiamo formalizzare questo problema in termini categoriali. Consideriamo la categoria **Part** (partizioni) dove gli oggetti sono insiemi decomponibili in componenti e i morfismi sono funzioni che preservano o modificano la struttura componenziale. Sia N_0 la nave al tempo t = 0, con componenti $C_0 = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Al tempo t, alcune componenti sono state sostituite, producendo N_t con componenti C_t = {c_1, c_2, ..., c_k, c'_{k+1}, ..., c'_n} dove c'_i indica un componente sostitutivo.

Possiamo definire diverse nozioni di identità:

Identità mereologica stretta: $N_t = N_0$ se e solo se $C_t = C_0$. Secondo questo criterio, la nave cessa di essere identica non appena il primo componente viene sostituito.

Identità funzionale: $N_t \approx N_0$ se esiste un isomorfismo funzionale $F: N_0 \to N_t$ che preserva tutte le relazioni funzionali tra i componenti. In altre parole, se la nave al tempo t può svolgere tutte le stesse funzioni nella stessa configurazione strutturale, allora è funzionalmente identica alla nave originale, indipendentemente dalla sostituzione materiale.

Identità topologica: $N_t \sim N_0$ se esiste un omeomorfismo (isomorfismo nella categoria degli spazi topologici) tra N_0 e N_t. Questo preserva proprietà topologiche come connessione, compattezza e genere, ma non la composizione materiale specifica.

Identità persistente attraverso un percorso continuo: definiamo una funzione $\gamma: [0,T] \to$ **Part** dove $\gamma(0) = N_0$ e $\gamma(T) = N_T$. Se γ è continua in un senso opportuno (ogni piccolo incremento temporale corrisponde a piccole modifiche nella nave), allora N_T è identica a N_0 attraverso continuità temporale, anche se γ(0) e γ(T) non condividono componenti materiali.

Quest'ultima nozione è particolarmente rilevante per le metamorfosi. Sebbene le metamorfosi ovidiane sembrino istantanee nel racconto poetico ("subito le sue braccia diventano rami..."), possiamo immaginarle come limiti di processi continui. Consideriamo la trasformazione di Dafne come un percorso in uno spazio di configurazioni:

$\delta: [0,\varepsilon] \to$ **Space_corporeo** $\delta(0)$ = Dafne_umana $\delta(\varepsilon)$ = Alloro

dove ε è un tempo infinitesimale. Se δ è continua (non ci sono salti discontinui nella configurazione corporea), allora c'è una forma di identità che persiste attraverso la trasformazione. Ma le metamorfosi ovidiane sono spesso discontinue: "Prima era ninfa, ora è albero" implica una discontinuità categoriale. Possiamo però salvare una forma di continuità considerando spazi di configurazione più astratti dove "ninfità" e "arborità" sono regioni connesse in uno spazio ontologico più ampio.

Topologia dell'identità: spazi di configurazione ontologica

Per comprendere più rigorosamente l'identità attraverso la metamorfosi, dobbiamo introdurre la nozione di spazio di configurazione ontologica. Sia **O** uno spazio topologico i cui punti rappresentano tutte le possibili configurazioni ontologiche (forme, essenze, stati). Possiamo pensare a **O** come uno spazio infinito-dimensionale dove ogni dimensione corrisponde a un attributo ontologico (razionalità, mobilità, materialità, temporalità, ecc.).

Ogni ente nella mitologia è rappresentato da un punto o una regione in **O**. **Umano** è una regione $U \subset \mathbf{O}$, **Animale** è una regione $A \subset \mathbf{O}$, **Pianta** è una regione $P \subset \mathbf{O}$. Una metamorfosi $\mu: X \to Y$ è un percorso in **O** che connette un punto in U con un punto in A (o P, o altre regioni).

La questione dell'identità diventa: quando due punti $x, y \in \mathbf{O}$ rappresentano lo "stesso" ente? Possiamo definire una relazione di equivalenza $\sim$ su **O** che identifica punti considerati ontologicamente identici. L'insieme quoziente $\mathbf{O}/\sim$ è lo spazio delle identità. Un ente X "persiste" attraverso una metamorfosi μ se $[\mu(X)] = [X]$ in $\mathbf{O}/\sim$, cioè se il punto finale e il punto iniziale appartengono alla stessa classe di equivalenza.

Il problema è che la relazione $\sim$ non è universale ma dipende dal criterio di identità adottato:

- Se usiamo identità materiale stretta, $\sim$ è la relazione di uguaglianza (ogni punto è equivalente solo a sé stesso), e nessuna metamorfosi preserva l'identità.

- Se usiamo identità funzionale-psicologica, $\sim$ identifica punti che condividono la stessa struttura mentale. Io umana $\sim$ Io giovenca perché condividono la stessa mente, ma Licaone umano $\not\sim$ Licaone lupo perché la mente è trasformata.

- Se usiamo identità narrativa, $\sim$ è la relazione di "connessione causale-narrativa", che è molto più ampia e sotto la quale quasi tutte le metamorfosi preservano identità.

Un approccio alternativo è usare la nozione di **fascio** (sheaf) dalla teoria dei fasci in topologia algebrica. Un'identità personale può essere vista come una sezione di un fascio F su **O**, dove F associa a ogni regione aperta $U \subset \mathbf{O}$ l'insieme delle possibili "storie di identità" coerenti su quella regione. Una metamorfosi è una sezione globale, un'identità che si estende coerentemente attraverso regioni ontologiche diverse.

Omotopia e equivalenza delle trasformazioni

Due percorsi in uno spazio topologico sono omotopici se uno può essere continuamente deformato nell'altro. Formalmente, due percorsi $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \to X$ sono omotopici se esiste una omotopia $H: [0,1] \times [0,1] \to X$ tale che $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$, e $H(0,t) = x_0$, $H(1,t) = x_1$ per tutti s, t (i percorsi hanno gli stessi punti iniziali e finali).

Nel contesto delle metamorfosi, possiamo chiederci: esistono metamorfosi omotopicamente diverse che connettono gli stessi stati iniziali e finali? In altre parole, ci sono modi "essenzialmente diversi" di trasformare un umano in un animale?

La risposta è affermativa. Consideriamo due trasformazioni **Umano** → **Lupo**:

1. Licaone diventa lupo come punizione per empietà: perde progressivamente la ragione, assume comportamenti bestiali, e infine la forma fisica si adatta alla natura psicologica già trasformata.

2. Un ipotetico guerriero, benedetto da Artemide, assume periodicamente forma di lupo per cacciare, mantenendo piena consapevolezza e controllo. La trasformazione è un dono, non una punizione.

Questi due percorsi nello spazio ontologico **O** connettono regioni simili (Umano razionale → Lupo) ma passano attraverso "zone" diverse: il primo passa attraverso la regione della degradazione morale, il secondo attraverso la regione della benedizione divina. Non sono omotopici perché non possono essere continuamente deformati l'uno nell'altro senza attraversare regioni ontologicamente proibite.

La classe di omotopia di una metamorfosi cattura quindi non solo lo stato iniziale e finale ma anche la "qualità morale e causale" della trasformazione. Questo spiega perché nelle narrazioni mitologiche è cruciale non solo sapere che X si trasforma in Y, ma anche *come* e *perché* questa trasformazione avviene. La classe di omotopia codifica il significato narrativo e morale della metamorfosi.

Licantropia come automorfismo periodico

Definizione matematica di licantropia

La licantropia (la trasformazione periodica di un umano in lupo e viceversa) è significativamente diversa dalle metamorfosi permanenti esaminate finora. È un esempio perfetto di *automorfismo periodico*, cioè una trasformazione reversibile di un oggetto in sé stesso che si ripete ciclicamente.

Formalmente, consideriamo un licantropo L come un oggetto nella categoria **Mit**. La licantropia è rappresentata da un automorfismo $\lambda: L \to L$ (il morfismo manda il licantropo in sé stesso, ma in uno stato trasformato). La proprietà fondamentale è che λ ha ordine finito, tipicamente 2:

$\lambda \circ \lambda = \lambda^2 = id_L$

Questo significa che applicando la trasformazione due volte si ritorna allo stato originale. La licantropia è quindi un'azione del gruppo ciclico $Z_2 = \{id, \lambda\}$ sull'oggetto L.

Più in generale, possiamo considerare trasformazioni con periodo $n > 2$. Se un ente attraversa n stati diversi prima di ritornare allo stato originale, abbiamo un'azione del gruppo ciclico Z_n:

$\lambda^n = id_L$

Ad esempio, se un personaggio attraversa le fasi Umano → Lupo → Corvo → Umano in un ciclo, abbiamo un'azione di Z_3.

Struttura del gruppo di automorfismi

L'insieme di tutti gli automorfismi di un oggetto X forma un gruppo Aut(X), chiamato il gruppo degli automorfismi di X. Gli elementi sono automorfismi, l'operazione è la composizione, l'elemento neutro è l'identità id_X, e ogni automorfismo ha un inverso.

Per un licantropo L, il gruppo Aut(L) contiene almeno:

- id_L (l'identità: nessuna trasformazione)
- λ (la trasformazione umano → lupo)
- λ^{-1} (la trasformazione inversa lupo → umano)

Ma poiché $\lambda^2 = id_L$, abbiamo $\lambda = \lambda^{-1}$, quindi Aut(L) contiene esattamente due elementi: {id_L, λ}. Questo è isomorfo al gruppo Z_2, il più semplice gruppo non banale.

La struttura del gruppo Z_2 ha implicazioni profonde:

1. **Non commutatività temporale marginale**: Z_2 è un gruppo abeliano (commutativo), quindi $\lambda \circ \lambda = \lambda \circ \lambda$, ma questa commutatività è degenerata perché c'è solo un elemento non banale. In gruppi di automorfismi più complessi (trasformazioni con n > 2 stati), la non commutatività diventa rilevante.

2. **Stabilità della struttura ciclica**: Poiché $\lambda^2 = id$, il sistema è stabile: non c'è deriva o accumulo di trasformazioni. Ogni due trasformazioni si ritorna esattamente al punto di partenza. Questo contrasta con metamorfosi irreversibili dove si accumula distanza dall'origine.

3. **Orbita finita**: L'orbita di L sotto l'azione di Z_2 è {L_umano, L_lupo}, un insieme finito di due elementi. Questo significa che lo spazio di configurazione del licantropo è discreto e finito, non continuo e infinito come quello di un ente soggetto a metamorfosi irreversibili multiple.

Trigger temporali e spaziali come morfismi di controllo

La licantropia non avviene spontaneamente ma è tipicamente controllata da fattori esterni: la luna piena, la notte, rituali specifici, o la volontà stessa del licantropo (nelle versioni più moderne del mito). Possiamo modellare questi trigger come morfismi di controllo.

Definiamo una categoria **Tempo** i cui oggetti sono intervalli temporali e i cui morfismi sono inclusioni o relazioni temporali. Definiamo una categoria **Spazio** i cui oggetti sono regioni spaziali. Un trigger lunare è un funtore:

T_luna: **Tempo** → Aut(L)

che manda ogni momento temporale nell'automorfismo appropriato: durante la luna piena, T_luna(t) = λ (trasformazione attiva); durante altre fasi, T_luna(t) = id_L (nessuna trasformazione).

Questo funtore deve soddisfare vincoli di continuità: se t_1 è immediatamente prima di t_2 e $T_luna(t_1) = id$ mentre $T_luna(t_2) = \lambda$, allora deve esistere un momento di transizione. Questo momento corrisponde alla narrazione drammatica della trasformazione: "mentre la luna sorge, il licantropo sente le ossa che si riconfigurano...".

Possiamo anche definire trigger spaziali. Se la licantropia si attiva solo in certi luoghi (foreste sacre, luoghi maledetti), abbiamo un funtore:

T_spazio: **Spazio** → Aut(L)

che manda regioni spaziali "attive" in λ e regioni "inerte" in id_L.

La composizione di trigger temporali e spaziali produce un funtore prodotto:

T: **Tempo** × **Spazio** → Aut(L)

che specifica quando e dove la trasformazione è attiva. Questo modello cattura la complessità delle condizioni di trasformazione nelle narrazioni licantropiche: "solo durante le notti di luna piena, nella foresta oltre il fiume...".

Licantropia volontaria e involontaria: differenze strutturali

Esiste una distinzione cruciale tra licantropia volontaria (il licantropo può scegliere quando trasformarsi) e involontaria (la trasformazione è automatica sotto certe condizioni). In termini categoriali, questa distinzione riguarda il controllo sul funtore T.

Licantropia involontaria: Il funtore T: **Tempo** × **Spazio** → Aut(L) è una proprietà oggettiva dell'universo mitico, non sotto il controllo del licantropo. Il licantropo è un "oggetto passivo" rispetto all'azione del gruppo Z_2.

Licantropia volontaria: Il licantropo possiede un "morfismo di volizione" v: **Stati_mentali** → Aut(L) che mappa intenzioni in trasformazioni. Se il licantropo vuole trasformarsi, $v(vuole_trasformarsi) = \lambda$; altrimenti, $v(non_vuole) = id_L$. Il funtore temporale-spaziale T diventa una *condizione necessaria* ma non sufficiente: la trasformazione avviene solo se $T(t,x) = \lambda$ *e* $v(stato_mentale) = \lambda$.

Questa distinzione ha conseguenze profonde per l'identità e la responsabilità morale. Nella licantropia involontaria, il licantropo-lupo non è moralmente responsabile delle azioni compiute in forma lupina, perché la trasformazione è subita, non scelta. La forma lupina è quasi un "secondo oggetto" distinto, collegato al primo solo dalla biologia. Nella licantropia volontaria, invece, c'è continuità di agentività: il licantropo sceglie di assumere forma lupina e rimane responsabile delle azioni compiute in quella forma.

Generalizzazione: azioni di gruppo e trasformazioni multiple

La licantropia con Z_2 è il caso più semplice, ma possiamo generalizzare a trasformazioni più complesse usando la teoria delle azioni di gruppo.

Un'*azione di gruppo* di un gruppo G su un oggetto X (in una categoria appropriata) è un omomorfismo φ: G $\rightarrow$ Aut(X). In altre parole, ogni elemento del gruppo corrisponde a un automorfismo di X, e l'operazione di gruppo corrisponde alla composizione di automorfismi.

Esempio 1: Trasformazioni stagionali cicliche Persefone alterna tra mondo terrestre e Ade in un ciclo annuale. Possiamo modellare questo come un'azione del gruppo ciclico Z_2 su Persefone, dove i due elementi corrispondono a "forma terrestre" e "forma ctonia". Ma potremmo anche usare un modello più fine con Z_{12} (i dodici mesi), dove sei mesi corrispondono a una forma e sei all'altra, con transizioni nei mesi equinoziali.

Esempio 2: Proteo e le trasformazioni multiple Proteo, il dio marino, può assumere qualsiasi forma per sfuggire a chi cerca di catturarlo. Le sue trasformazioni non sono periodiche ma formano un insieme molto ampio. Possiamo modellare Aut(Proteo) come un gruppo molto grande, possibilmente infinito. Se Proteo può assumere *qualsiasi* forma, allora Aut(Proteo) potrebbe essere isomorfo al gruppo simmetrico di tutte le forme possibili, che è un gruppo enorme e non abeliano.

Esempio 3: Zeus e le trasformazioni divine Zeus assume numerose forme (toro, cigno, pioggia d'oro, aquila, ecc.) ma sempre in modo controllato e reversibile. L'insieme delle sue trasformazioni forma un sottogruppo di Aut(Zeus), chiamiamolo Z $\subset$ Aut(Zeus). La struttura di Z riflette le "simmetrie divine": le forme che Zeus può assumere senza perdere la propria divinità essenziale.

Automorfismi interni ed esterni

Nella teoria dei gruppi, si distingue tra automorfismi interni (coniugazione da parte di elementi del gruppo) e automorfismi esterni (che non possono essere espressi come coniugazioni). Possiamo applicare questa distinzione alle metamorfosi.

Un *automorfismo interno* è una trasformazione che può essere generata da operazioni già presenti nell'oggetto. Nel caso della licantropia, se la trasformazione emerge da una "natura lupina" già presente nell'umano (come nel caso di Licaone, la cui bestialità umana si manifesta nella forma lupina), allora l'automorfismo è "interno": la forma lupina è già "contenuta" potenzialmente nell'umano.

Un *automorfismo esterno* è una trasformazione imposta dall'esterno. Se la licantropia è il risultato di una maledizione divina applicata a un umano del tutto normale, allora è un automorfismo esterno: la forma lupina non era potenzialmente presente ma viene imposta da un agente esterno (la divinità che maledice).

Questa distinzione è filosoficamente profonda e riflette il dibattito tra concezioni essenzialiste e costruttiviste dell'identità. Gli automorfismi interni suggeriscono che le trasformazioni rivelano aspetti già presenti nell'essenza dell'ente; gli automorfismi esterni suggeriscono che le trasformazioni sono imposizioni contingenti che non rivelano nulla di essenziale.

Metempsicosi come catena di morfismi

La struttura sequenziale della reincarnazione

La metempsicosi, la dottrina della trasmigrazione delle anime attraverso corpi successivi, è concettualmente distinta dalla metamorfosi ovidiana. Mentre la metamorfosi è una trasformazione del corpo che può o meno preservare l'anima, la metempsicosi è una permanenza dell'anima attraverso corpi diversi. Questa distinzione ha una formulazione categoriale precisa.

Nella metempsicosi, possiamo identificare due categorie distinte:

- **Anime**: la categoria degli spiriti o anime, che sono gli oggetti persistenti
- **Corpi**: la categoria delle incarnazioni fisiche, che sono temporanee

La metempsicosi è allora una sequenza di morfismi nella categoria **Corpi**, unificata da un oggetto fisso nella categoria **Anime**. Formalmente, se ψ è un'anima e c_1, c_2, c_3, ... è una sequenza di corpi, la metempsicosi è una sequenza di morfismi:

$\psi: c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots \to c_n \to \ldots$

dove ogni morfismo rappresenta la "partenza" dell'anima dal corpo c_i e il suo "arrivo" nel corpo c_{i+1}. Crucialmente, ψ è costante: è sempre la stessa anima che passa da un corpo all'altro.

Questa struttura è radicalmente diversa dalla metamorfosi ovidiana, dove è il corpo stesso (e possibilmente l'anima con esso) che si trasforma. Nella metamorfosi: $X \to Y$ significa che l'ente X diventa l'ente Y. Nella metempsicosi: $\psi: c_1 \to c_2$ significa che l'anima ψ lascia il corpo c_1 e entra nel corpo c_2, ma ψ rimane identica.

Pitagora e la sequenza infinita di incarnazioni

Nel libro XV delle *Metamorfosi*, Ovidio presenta il discorso di Pitagora, che espone una filosofia universale del cambiamento e della trasformazione, includendo la dottrina della metempsicosi. Pitagora afferma di ricordare vite precedenti: fu Euforbo durante la guerra di Troia, poi altre incarnazioni, fino alla vita presente come filosofo a Crotone.

Possiamo rappresentare questa sequenza come una catena infinita (o potenzialmente infinita) di morfismi:

$\ldots \to \text{Euforbo} \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to \text{Pitagora} \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots$

dove ciascun termine rappresenta una incarnazione e le frecce rappresentano le trasmissioni dell'anima. La struttura è quella di una categoria **Sequ** (sequenze) che è una categoria *libera* generata da un grafo orientato infinito:

$\leftarrow \ldots \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \ldots$

dove ogni nodo è un'incarnazione e ogni freccia è una morte-rinascita.

La proprietà cruciale è che questa catena è *totalmente ordinata*: esiste una direzione temporale che va dal passato al futuro, e non ci sono cicli (un'anima non può reincarnarsi in una vita già vissuta, perché violerebbe la freccia del tempo). Matematicamente, la categoria delle incarnazioni di un'anima è isomorfa alla categoria ordinata **(Z, ≤)** (gli interi con

l'ordinamento standard) o alla categoria **(N, ≤)** (i naturali) se ammettiamo un'origine temporale.

Karma e la struttura di dipendenza causale

Nelle dottrine induiste e buddiste della metempsicosi, la natura dell'incarnazione successiva non è arbitraria ma dipende dalle azioni compiute nella vita presente. Questo è il principio del *karma*. In termini categoriali, il karma introduce una *funzione di transizione* che determina la prossima incarnazione in base allo stato morale attuale.

Definiamo una categoria **Karma** i cui oggetti sono stati morali (gradazioni di purezza, merito, demerito) e i cui morfismi sono azioni che modificano lo stato morale. Possiamo definire un funtore:

K: **Karma** → **Corpi**

che manda ogni stato morale nel tipo di corpo appropriato per la prossima incarnazione. Ad esempio:

- K(molto_virtuoso) = Umano_illuminato o Deva (semidio)
- K(moderatamente_virtuoso) = Umano_normale
- K(moderatamente_vizioso) = Animale_superiore (mammiferi)
- K(molto_vizioso) = Animale_inferiore (insetti) o Preta (spirito affamato)

Il funtore K deve soddisfare proprietà di *monotonicità*: se uno stato morale x è superiore a uno stato y nell'ordinamento morale, allora K(x) dovrebbe essere superiore a K(y) nell'ordinamento ontologico delle incarnazioni. Questo preserva la struttura di ordine parziale.

La sequenza di incarnazioni diventa allora un *sistema dinamico* governato da K:

c_{n+1} = K(stato_morale(c_n))

dove stato_morale(c_n) è determinato dalle azioni compiute durante l'incarnazione c_n. Questo introduce una dipendenza causale: ogni incarnazione determina (parzialmente) la successiva attraverso le azioni compiute.

Moksha e la categoria terminale

Nelle dottrine orientali, la metempsicosi non è eterna ma ha un possibile termine: il *moksha* (liberazione) o *nirvana*. Un'anima che raggiunge l'illuminazione esce dal ciclo delle rinascite. In termini categoriali, moksha è un *oggetto terminale* nella categoria delle incarnazioni.

Un oggetto T in una categoria **C** è terminale se per ogni oggetto X in **C** esiste esattamente un morfismo X → T. Nel contesto della metempsicosi, Nirvana è un oggetto terminale perché:

1. Da ogni incarnazione esiste un morfismo verso Nirvana (ogni ente può potenzialmente raggiungere l'illuminazione)

2. Questo morfismo è unico (c'è un solo modo di entrare nel Nirvana: attraverso l'illuminazione)
3. Non esistono morfismi *da* Nirvana verso altre incarnazioni (una volta liberata, l'anima non reincarna)

La categoria della metempsicosi ha quindi una struttura particolare: è una categoria parzialmente ordinata infinita con un oggetto terminale. Ogni catena di incarnazioni o converge verso Nirvana (se l'anima progredisce moralmente) o continua indefinitamente (se l'anima non raggiunge mai l'illuminazione).

Possiamo rappresentare questo come un grafo orientato dove molteplici percorsi (catene di incarnazioni) convergono verso un unico nodo terminale (Nirvana):

$$\begin{array}{l} \quad \text{Umano}_1 \to \text{Umano}_2 \to \ldots \to \text{Illuminato} \to \text{Nirvana} \\ \quad / \qquad\qquad\qquad\quad \nearrow \\ \text{Animale}_1 \to \text{Animale}_2 \to \text{Umano}_3 \to \ldots \to \text{Deva}_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \nearrow \\ \quad \text{Insetto}_1 \to \ldots \to \text{Animale}_3 \to \ldots \to \text{Deva}_2 \end{array}$$

La struttura è quella di un *cono* nella teoria delle categorie: molteplici oggetti convergono verso un vertice comune attraverso morfismi.

Confronto strutturale: metempsicosi vs metamorfosi

Possiamo ora confrontare sistematicamente le strutture categoriali della metempsicosi e della metamorfosi:

Metamorfosi ovidiana:

- Struttura: morfismo singolo $X \to Y$ (o sequenza breve di pochi morfismi)
- Reversibilità: tipicamente irreversibile (non è un isomorfismo)
- Identità: ambigua (dipende dal criterio adottato)
- Temporalità: evento puntuale o transizione rapida
- Causalità: tipicamente punizione o salvezza divina
- Direzione prevalente: discendente (degradazione ontologica)

Metempsicosi orientale:

- Struttura: catena infinita di morfismi $c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots$
- Reversibilità: irreversibile in senso temporale, ma ciclica in senso ontologico (si può passare da umano a animale e di nuovo a umano)
- Identità: preservata (l'anima è identica attraverso le incarnazioni)
- Temporalità: processo esteso attraverso eoni
- Causalità: karma (azioni determinano incarnazioni successive)
- Direzione: variabile (può essere ascendente o discendente a seconda del karma)

La differenza fondamentale è che la metamorfosi è una trasformazione *sincronica* (accade in un momento) mentre la metempsicosi è una successione *diacronica* (accade attraverso il

tempo esteso). Inoltre, la metamorfosi trasforma l'intero ente (corpo e spesso anima), mentre la metempsicosi preserva un nucleo di identità (l'anima) mentre cambia l'involucro (il corpo).

Metempsicosi come fibrazione

In termini più avanzati di teoria delle categorie, possiamo modellare la metempsicosi come una *fibrazione*. Una fibrazione è un funtore $p: \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ che soddisfa una proprietà di "sollevamento" dei morfismi.

Nel caso della metempsicosi:

- **E** (lo spazio totale) è la categoria di tutte le incarnazioni di tutte le anime
- **B** (la base) è la categoria delle anime
- $p: \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ è il funtore che manda ogni incarnazione all'anima che la abita

Per ogni anima $\psi \in \mathbf{B}$, la *fibra* $p^{-1}(\psi)$ è l'insieme di tutte le incarnazioni di quell'anima specifica. Questa fibra è esattamente la catena di incarnazioni di ψ:

$p^{-1}(\psi) = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$ dove $\psi: c_1 \to c_2 \to c_3 \to ...$

La proprietà di fibrazione garantisce che per ogni morfismo $\psi \to \psi'$ nella base (che potrebbe rappresentare una relazione tra anime, ad esempio una relazione karmica) e per ogni incarnazione c nella fibra $p^{-1}(\psi)$, esiste un "sollevamento" a un morfismo nella fibra che collega c a un'incarnazione in $p^{-1}(\psi')$.

Questa struttura di fibrazione cattura matematicamente l'idea che lo spazio delle incarnazioni è "stratificato" per anima: ogni anima ha il proprio percorso di incarnazioni, e questi percorsi sono strutturati in modo coerente.

Conservazione e perdita di proprietà essenziali

Kernel e cokernel: invarianti attraverso la trasformazione

Nella teoria delle categorie, particolarmente in categorie con struttura algebrica come categorie abeliane, i concetti di *kernel* e *cokernel* di un morfismo codificano rispettivamente ciò che viene annullato dalla trasformazione e ciò che viene creato ex novo.

Dato un morfismo $f: A \to B$, il kernel Ker(f) è il sotto-oggetto di A costituito da tutti gli elementi che vengono mandati nell'elemento neutro di B. Il cokernel Coker(f) è il quoziente di B rispetto all'immagine di f, cioè ciò che rimane di B dopo aver "sottratto" l'immagine di A.

Nel contesto delle metamorfosi, possiamo adattare questi concetti in modo più qualitativo. Definiamo:

Kernel di una metamorfosi: l'insieme delle proprietà dell'ente originale che vengono completamente perse nella trasformazione, cioè che vengono "annullate" e mandate in "zero" (assenza totale).

Cokernel di una metamorfosi: l'insieme delle proprietà nuove che emergono nell'ente trasformato e che non hanno nessun corrispondente nell'ente originale.

Immagine di una metamorfosi: l'insieme delle proprietà che vengono preservate, anche se possibilmente trasformate o tradotte in forma diversa.

Consideriamo alcuni esempi:

Esempio 1: Dafne → Alloro

Proprietà originali di Dafne (come ninfa):

- P_1: Mobilità volontaria
- P_2: Coscienza e razionalità
- P_3: Comunicazione linguistica
- P_4: Percezione sensoriale umana
- P_5: Forma umanoide verticale
- P_6: Castità e purezza
- P_7: Connessione con Apollo (relazione di fuga)
- P_8: Mortalità relativa (le ninfe vivono molto a lungo ma non sono immortali come gli dèi)

Proprietà finali dell'Alloro:

- Q_1: Immobilità (radicamento)
- Q_2: Assenza di coscienza (o coscienza vegetale minima)
- Q_3: Assenza di comunicazione attiva
- Q_4: Fotosintesi e percezione vegetale
- Q_5: Forma arborea verticale
- Q_6: Purezza simbolica (l'alloro diventa simbolo di purezza apollinea)
- Q_7: Connessione con Apollo (l'alloro diventa albero sacro ad Apollo)
- Q_8: Immortalità vegetale (l'alloro è sempreverde, simbolo di eternità)

Kernel della metamorfosi (proprietà perse): $\text{Ker}(\mu_\text{Dafne}) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ Dafne perde la mobilità, la coscienza umana, la capacità di comunicare verbalmente, e i sensi umani.

Immagine della metamorfosi (proprietà tradotte): $\text{Im}(\mu_\text{Dafne}) = \{P_5 \to Q_5, P_6 \to Q_6, P_7 \to Q_7, P_8 \to Q_8\}$ La verticalità della postura è preservata nella verticalità del tronco; la purezza della ninfa è tradotta nella purezza simbolica dell'alloro sempreverde; la relazione con Apollo è trasformata da fuga a dedica sacra; la mortalità relativa diventa immortalità vegetale (trasformazione, non preservazione stretta).

Cokernel della metamorfosi (proprietà nuove): $\text{Coker}(\mu_\text{Dafne}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ Le proprietà specificamente vegetali (radicamento, fotosintesi) sono interamente nuove e non hanno corrispondenti diretti nella condizione di ninfa.

Esempio 2: Licaone → Lupo

Proprietà originali di Licaone (come re umano empio):

- R_1: Razionalità umana
- R_2: Linguaggio articolato
- R_3: Postura eretta
- R_4: Organizzazione sociale complessa (regno)
- R_5: Empietà e crudeltà (vizio morale)
- R_6: Alimentazione onnivora con tendenza carnivora estrema
- R_7: Capacità di compiere sacrifici (anche se sacrileghi)

Proprietà finali del Lupo:

- S_1: Istinto lupesco
- S_2: Ululati e ringhii (comunicazione animale)
- S_3: Postura quadrupede
- S_4: Organizzazione in branco
- S_5: Ferocia predatoria (attributo animale corrispondente al vizio umano)
- S_6: Alimentazione carnivora esclusiva
- S_7: Comportamento predatorio ritualizzato

Kernel della metamorfosi: Ker(μ_Licaone) = {R_1, R_2, R_3, R_7} Licaone perde la razionalità propriamente umana, il linguaggio articolato, la postura eretta, e la capacità di compiere atti religiosi.

Immagine della metamorfosi: Im(μ_Licaone) = {$R_4 \to S_4$, $R_5 \to S_5$, $R_6 \to S_6$} La struttura sociale umana (regno) è tradotta nella struttura sociale lupesca (branco); l'empietà e crudeltà umane sono tradotte nella ferocia predatoria lupesca; l'alimentazione carnivora estrema è preservata e anzi intensificata.

Questo esempio mostra una caratteristica importante: la metamorfosi punitiva opera una *traduzione morale* in cui i vizi umani trovano corrispettivi animali. Il morfismo μ_Licaone preserva la struttura etica negativa traducendola da un registro ontologico (umano) a un altro (animale).

Esempio 3: Io → Giovenca → Io restaurata

Questo caso è particolarmente interessante perché coinvolge una metamorfosi seguita da una parziale inversione.

Prima metamorfosi: μ_1: Io_umana → Io_giovenca **Seconda metamorfosi**: μ_2: Io_giovenca → Io_restaurata

La composizione $\mu_2 \circ \mu_1$: Io_umana → Io_restaurata non è l'identità perché Io_restaurata ≠ Io_umana. Possiamo analizzare cosa viene preservato attraverso il ciclo completo:

Invarianti del ciclo completo (proprietà preservate attraverso $\mu_2 \circ \mu_1$):

- Memoria e continuità psicologica (Io ricorda tutta l'esperienza)
- Identità personale (è riconosciuta come la stessa Io)
- Relazioni (il padre Inaco la riconosce alla fine)

Proprietà perse permanentemente:

- Innocenza (l'esperienza della trasformazione e della sofferenza modifica permanentemente la psiche)
- Status sociale originario (non torna a essere principessa nella stessa condizione)

Proprietà acquisite permanentemente:

- Saggezza tragica (la conoscenza acquisita attraverso la sofferenza)
- Connessione con il divino (diventerà venerata come la dea egizia Iside)

La composizione $\mu_2 \circ \mu_1$ è quindi approssimativamente, ma non esattamente, un isomorfismo. È meglio descritta come un *quasi-isomorfismo*, un concetto della teoria delle categorie superiori dove due oggetti sono equivalenti "up to higher coherence", cioè equivalenti modulo trasformazioni di ordine superiore.

Proprietà essenziali vs proprietà accidentali

La distinzione aristotelica tra proprietà essenziali (quelle senza le quali un ente cesserebbe di essere ciò che è) e proprietà accidentali (quelle che possono variare senza che l'ente perda la propria identità) trova una formulazione categoriale naturale.

Definiamo un funtore di essenza:

E: **Mit** → **Essenze**

dove **Essenze** è una categoria i cui oggetti sono "fasci di proprietà essenziali". Due oggetti X e Y nella categoria **Mit** hanno la stessa essenza se E(X) = E(Y).

Una metamorfosi μ: X → Y è *essenziale* se E(X) ≠ E(Y), cioè se cambia l'essenza dell'ente. È *accidentale* se E(X) = E(Y), cioè se preserva l'essenza pur modificando aspetti superficiali.

Secondo questa definizione:

- Dafne → Alloro è una metamorfosi essenziale: l'essenza di ninfa è ontologicamente diversa dall'essenza di pianta
- Le trasformazioni divine temporanee di Zeus sono metamorfosi accidentali: l'essenza divina di Zeus non cambia quando assume forma di toro o cigno
- La licantropia è ambigua: se consideriamo l'essenza come "natura razionale", allora una licantropia che preserva la razionalità è accidentale; se consideriamo l'essenza come "natura umana biologica", allora è essenziale

Il problema filosofico è: quali proprietà sono essenziali? La risposta varia a seconda del sistema metafisico adottato:

Aristotelismo: L'essenza è la forma sostanziale. Per gli umani, è la razionalità. Quindi qualsiasi metamorfosi che elimina la razionalità è essenziale (distrugge l'essenza umana). Licaone → Lupo è essenziale; Io umana → Io giovenca è accidentale (se preserva la mente) o essenziale (se la distrugge).

Locke e identità psicologica: L'essenza personale è la continuità della coscienza. Quindi metamorfosi che preservano memoria e coscienza sono accidentali rispetto all'identità personale, anche se essenziali rispetto all'identità biologica.

Buddismo: Non esiste un'essenza permanente (dottrina dell'anatman). Tutte le proprietà sono accidentali, inclusa la forma corporea. La metempsicosi non cambia un'essenza (perché non esiste) ma è semplicemente una successione di aggregati (skandha) causalmente connessi.

Funtori dimenticanti e funtori liberi

Nella teoria delle categorie, un *funtore dimenticante* (forgetful functor) U: **C** → **D** "dimentica" parte della struttura, mandando oggetti di una categoria più strutturata in oggetti di una categoria meno strutturata. Ad esempio, il funtore dimenticante dai gruppi agli insiemi manda ogni gruppo nel suo insieme sottostante, dimenticando l'operazione di gruppo.

Possiamo interpretare alcune metamorfosi come applicazioni di funtori dimenticanti:

U_razionalità: Umano → Animale Questo funtore dimentica la razionalità propriamente umana (o la riduce significativamente), preservando solo l'animalità biologica. Licaone → Lupo è una realizzazione di questo funtore.

U_mobilità: Animale → Pianta Questo funtore dimentica la mobilità autonoma, preservando solo la vita organica. Dafne (ninfa, che è parzialmente animale) → Alloro è parzialmente una realizzazione di questo funtore.

U_vita: Organismo → Minerale Questo funtore dimentica la vita stessa, preservando solo l'esistenza materiale. Niobe → Roccia è una realizzazione di questo funtore. Niobe, pietrificata dal dolore dopo la perdita dei figli, diventa una roccia che continua a "piangere" (sgorga acqua), ma ha perso tutte le proprietà vitali.

Il *funtore libero* (free functor) F: **D** → **C** è l'adjoint sinistro del funtore dimenticante, quando esiste. Manda oggetti della categoria meno strutturata in oggetti della categoria più strutturata nel modo "più libero possibile" (senza imporre restrizioni aggiuntive non necessarie).

Curiosamente, nelle metamorfosi ovidiane raramente vediamo funtori liberi: le trasformazioni sono prevalentemente nella direzione di perdita di struttura (funtori dimenticanti), non di acquisizione. Non ci sono metamorfosi **Minerale → Pianta → Animale → Umano** che progressivamente "aggiungono struttura". Questo riflette una visione tragica: la metamorfosi è più spesso degradazione che elevazione.

L'eccezione significativa è l'apoteosi: la trasformazione di umani o eroi in divinità. Ercole, dopo la morte, viene accolto nell'Olimpo. Romolo diventa Quirino. Queste sono trasformazioni che "aggiungono" struttura (immortalità, potere divino), e potrebbero essere interpretate come realizzazioni di un funtore libero F: **Umano → Divino**.

Trasformazioni naturali e l'universalità delle metamorfosi

Il concetto di trasformazione naturale

Una delle idee più profonde della teoria delle categorie è quella di *trasformazione naturale* tra funtori. Se F, G: **C** → **D** sono due funtori, una trasformazione naturale η: F ⇒ G è una famiglia di morfismi {η_X: F(X) → G(X)} indicizzata sugli oggetti X di **C**, che soddisfa una condizione di compatibilità (naturalità): per ogni morfismo f: X → Y in **C**, il diagramma seguente commuta:

```
F(X) ---η_X--→ G(X)
  |             |
F(f)|           |G(f)
  ↓             ↓
F(Y) ---η_Y--→ G(Y)
```

In altre parole: G(f) ◦ η_X = η_Y ◦ F(f). La trasformazione è "naturale" nel senso che non dipende da scelte arbitrarie ma è determinata dalla struttura dei funtori.

Nel contesto delle metamorfosi, possiamo interpretare le trasformazioni naturali come *schemi universali di metamorfosi* che si applicano coerentemente attraverso diverse istanze. Non è una singola metamorfosi particolare (Dafne → Alloro) ma uno schema generale (Ninfa_inseguita → Pianta_protettiva) che si realizza in molteplici casi concreti.

Esempio: lo schema della metamorfosi salvifica

Consideriamo due funtori:

- F: **Situazioni** → **Mit** che manda ogni situazione di pericolo nell'ente che la subisce nella sua forma originale
- G: **Situazioni** → **Mit** che manda ogni situazione di pericolo nell'ente trasformato in forma protettiva

Una trasformazione naturale η: F ⇒ G è uno schema di metamorfosi salvifica che si applica coerentemente a tutte le situazioni di pericolo.

Istanze concrete:

- η_Dafne: Dafne_ninfa → Dafne_alloro (inseguita da Apollo)
- η_Pleiadi: Pleiadi_ninfe → Pleiadi_stelle (inseguite da Orione)
- η_Aretusa: Aretusa_ninfa → Aretusa_fonte (inseguita da Alfeo)

La naturalità della trasformazione η significa che se consideriamo un morfismo f nella categoria **Situazioni** (ad esempio, un'intensificazione del pericolo), allora il seguente diagramma commuta:

F(pericolo_moderato) --η-⟶ G(pericolo_moderato)
| |
F(f)| |G(f)
↓ ↓
F(pericolo_estremo) --η-⟶ G(pericolo_estremo)

Questo significa che l'intensificazione del pericolo porta coerentemente a forme di protezione più drastiche, indipendentemente dal caso specifico. La ninfa sotto pericolo moderato potrebbe essere trasformata in fonte (può ancora fluire, muoversi); sotto pericolo estremo, in pietra (immobilità totale, ma inattaccabilità completa).

Naturalità e inevitabilità delle trasformazioni

La naturalità di una trasformazione cattura matematicamente un'intuizione profonda delle metamorfosi mitologiche: certe trasformazioni sono "inevitabili" data la struttura della situazione, non sono scelte arbitrarie ma conseguenze necessarie.

Quando Aracne sfida Atena e tesse un arazzo magnifico ma blasfemo, la trasformazione in ragno non è un castigo arbitrario ma una trasformazione *naturale* nel senso categoriale: preserva la capacità di tessere (la componente funzionale è mantenuta dal funtore) mentre degrada il contesto sociale (da artista umana celebrata a insetto isolato). La naturalità garantisce che questo tipo di trasformazione si applichi coerentemente a situazioni analoghe: chi sfida gli dèi nel proprio ambito di eccellenza viene trasformato in una versione degradata ma permanente di quell'eccellenza.

Questo spiega anche la *prevedibilità narrativa* delle metamorfosi: il lettore delle *Metamorfosi* impara a prevedere il tipo di trasformazione che seguirà una trasgressione, perché le trasformazioni seguono schemi naturali. La naturalità è la formalizzazione matematica della coerenza narrativa e simbolica.

Equivalenza naturale e isomorfismo di funtori

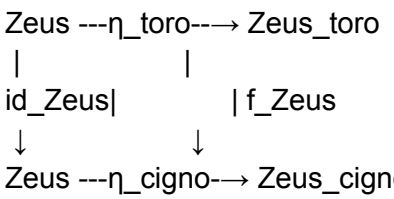
Una trasformazione naturale η: F ⇒ G è una *equivalenza naturale* (o isomorfismo naturale) se ogni componente η_X: F(X) → G(X) è un isomorfismo. In questo caso, scriviamo F ≅ G e diciamo che i funtori sono naturalmente isomorfi.

Nel contesto mitologico, un'equivalenza naturale rappresenterebbe una trasformazione completamente reversibile e sistematica. Le trasformazioni divine temporanee di Zeus potrebbero essere interpretate in questo modo: esiste un'equivalenza naturale tra il funtore "identità divina" e il funtore "forma assunta", perché Zeus può sempre ritornare alla forma originale senza perdita.

Formalmente, se Z: **Forme_Zeus** → **Mit** è il funtore che manda ogni forma (toro, cigno, pioggia d'oro) nella sua realizzazione mitica, e I: **Forme_Zeus** → **Mit** è il funtore costante che manda ogni forma nell'identità divina di Zeus, allora esiste un'equivalenza naturale:

η: I ≅ Z

dove η_toro: Zeus → Zeus_toro è un isomorfismo (Zeus può diventare toro e ritornare), η_cigno: Zeus → Zeus_cigno è un isomorfismo, ecc. La naturalità garantisce che queste trasformazioni siano coerenti: se c'è un morfismo f: Toro → Cigno nella categoria delle forme (ad esempio, "entrambe sono forme usate per seduzione"), allora la trasformazione rispetta questa struttura:



Trasformazioni naturali e composizione verticale

Le trasformazioni naturali possono essere composte in due modi: *verticalmente* e *orizzontalmente*. La composizione verticale corrisponde all'applicazione successiva di trasformazioni tra gli stessi funtori:

Se η: F ⇒ G e θ: G ⇒ H sono trasformazioni naturali, la loro composizione verticale θ ◦ η: F ⇒ H è definita componente per componente: (θ ◦ η)_X = θ_X ◦ η_X.

Nel contesto mitologico, questo rappresenta metamorfosi successive che seguono schemi coerenti. Consideriamo:

- F: identità originale
- G: prima trasformazione (umano → animale)
- H: seconda trasformazione (animale → costellazione)

Callisto subisce esattamente questa sequenza: donna → orsa (η_Callisto) → costellazione dell'Orsa Maggiore (θ_Callisto). La composizione verticale θ ◦ η è la trasformazione complessiva donna → costellazione.

La naturalità della composizione garantisce che se un'altra persona seguisse una sequenza analoga (ad esempio, Arcas: ragazzo → orso → costellazione dell'Orsa Minore), la struttura sarebbe preservata. Le due trasformazioni sono parallele e coerenti.

2-Categorie e metamorfosi di metamorfosi

La teoria delle categorie superiori (n-categorie) introduce morfismi tra morfismi. In una 2-categoria, oltre agli oggetti e ai morfismi (1-morfismi), esistono 2-morfismi che sono morfismi tra morfismi.

Nel contesto mitologico, possiamo interpretare i 2-morfismi come *modificazioni di trasformazioni*. Se μ_1: X → Y e μ_2: X → Y sono due diverse metamorfosi che trasformano lo stesso oggetto X nello stesso oggetto Y (possibile se Y è una categoria con molteplici istanze, come "Lupo" che include molteplici lupi individuali), un 2-morfismo α: μ_1 ⇒ μ_2 sarebbe una "trasformazione di trasformazione".

Un esempio concreto è difficile da trovare in Ovidio, ma possiamo immaginare situazioni ipotetiche:

- μ_1: trasformazione rapida e dolorosa (punizione divina immediata)
- μ_2: trasformazione graduale e pietosa (concessione di tempo per accettare)
- α: una divinità modifica la natura della trasformazione, cambiando da μ_1 a μ_2 per pietà

Questo livello di astrazione cattura la possibilità che le modalità stesse delle metamorfosi possano essere soggette a modificazione, riflettendo la contingenza e la possibilità di clemenza o crudeltà divina anche all'interno di un destino già determinato.

Formalizzazione topologica delle metamorfosi

Spazi di configurazione e campi morfici

Oltre all'approccio categoriale puro, possiamo formalizzare le metamorfosi usando la topologia degli spazi di configurazione. Definiamo uno *spazio di configurazione biologica* **B** che è un spazio topologico (possibilmente infinito-dimensionale) i cui punti rappresentano configurazioni corporee possibili.

Ogni ente biologico occupa un punto o una regione in **B**. Un umano tipico occupa una regione $U \subset \mathbf{B}$, un lupo occupa una regione $L \subset \mathbf{B}$, un alloro occupa una regione $A \subset \mathbf{B}$. Una metamorfosi $\mu: X \to Y$ è rappresentata da un percorso $\gamma: [0,1] \to \mathbf{B}$ tale che $\gamma(0) \in U$ e $\gamma(1) \in L$ (per una trasformazione umano → lupo).

La topologia di **B** determina quali trasformazioni sono "continue" (possibili senza discontinuità catastrofiche) e quali sono "discontinue" (richiedono salti ontologici). Possiamo definire una metrica $d: \mathbf{B} \times \mathbf{B} \to \mathbb{R}_+$ che misura la "distanza ontologica" tra configurazioni:

- d(umano, umano_simile) è piccola
- d(umano, scimmia) è moderata
- d(umano, lupo) è grande
- d(umano, albero) è molto grande
- d(umano, pietra) è massimale (distanza infinita se consideriamo animato vs inanimato)

La velocità di una metamorfosi può essere definita come la derivata del percorso:

$v(t) = ||d\gamma/dt||$

Se v(t) è sempre finita, la metamorfosi è continua. Se v(t) diventa infinita in qualche punto, c'è una discontinuità. Le metamorfosi ovidiane sono tipicamente discontinue: "subito le braccia diventano rami" suggerisce velocità infinita, un salto discontinuo.

Campi vettoriali di trasformazione e flussi metamorfici

Possiamo definire un *campo vettoriale di trasformazione* V: **B** → T**B** dove T**B** è il fibrato tangente di **B**. Per ogni configurazione corporea b ∈ **B**, V(b) indica la "direzione e velocità" della trasformazione potenziale in quel punto.

Le metamorfosi sono allora curve integrali di V: soluzioni dell'equazione differenziale:

$d\gamma/dt = V(\gamma(t))$

con condizione iniziale $\gamma(0) = b_0$ (la configurazione iniziale dell'ente da trasformare).

Diverse regioni di **B** hanno campi vettoriali diversi:

- Nella regione degli umani giusti, il campo vettoriale V è piccolo o nullo (poca tendenza alla metamorfosi)
- Nella regione degli umani empi, V punta verso la regione animale (forte tendenza alla metamorfosi punitiva)
- Nella regione delle ninfe inseguite, V punta verso piante o fonti (tendenza alla metamorfosi salvifica)

I *punti di equilibrio* del campo vettoriale (dove V(b) = 0) sono configurazioni stabili che non tendono a trasformarsi. Gli dèi olimpici occupano punti di equilibrio: non tendono a metamorfosi permanenti perché sono ontologicamente stabili.

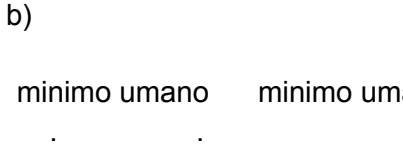
I *punti critici* (dove il campo vettoriale è discontinuo o ha derivate non definite) rappresentano soglie ontologiche: i confini tra umano e animale, tra vivo e morto, tra corporeo e incorporeo. Attraversare un punto critico richiede intervento esterno (divino) perché il sistema non può spontaneamente superare la barriera.

Teoria della catastrofe e discontinuità metamorfiche

La *teoria della catastrofe*, sviluppata da René Thom negli anni '60, studia come piccoli cambiamenti continui in parametri possano causare cambiamenti discontinui improvvisi nei sistemi. Questa teoria è perfettamente applicabile alle metamorfosi.

Consideriamo uno spazio di parametri **P** (ad esempio, lo spazio dei comportamenti morali) e una funzione di potenziale V: **P** × **B** → R che assegna a ogni coppia (parametro, configurazione) un valore di "energia potenziale ontologica". Le configurazioni stabili sono i minimi locali di V.

All'aumentare di un parametro morale (ad esempio, l'empietà di Licaone), il sistema rimane inizialmente in un minimo locale (la configurazione umana). Ma a un valore critico del parametro, il minimo locale scompare e il sistema "cade" catastroficamente in un altro minimo (la configurazione lupina). Questo è un esempio di *catastrofe di piega* (fold catastrophe):



Al punto critico, il minimo umano si annichila e il sistema salta discontinuamente al minimo lupino. Questo modello spiega perché le metamorfosi sembrano istantanee nelle narrazioni: sono transizioni di fase catastrofiche.

Topologia delle forme e invarianti omotopici

Possiamo studiare le forme corporee usando invarianti topologici che rimangono costanti sotto trasformazioni continue. Il più semplice è il *numero di Eulero* χ (o caratteristica di Eulere-Poincaré).

Per una superficie chiusa orientabile di genere g (con g "buchi"), $\chi = 2 - 2g$. Ad esempio:

- Sfera (genere 0): $\chi = 2$
- Toro (genere 1): $\chi = 0$
- Pretzel con n buchi (genere n): $\chi = 2 - 2n$

Il corpo umano, considerato topologicamente come una superficie (la pelle), ha genere diverso da zero a causa degli orifizi (bocca, narici, ecc.). Stimando approssimativamente, un corpo umano potrebbe avere caratteristica di Eulero negativa.

Una metamorfosi che è topologicamente continua (un omeomorfismo) deve preservare χ. Ma la maggior parte delle metamorfosi ovidiane non preservano χ, quindi non sono omeomorfismi: sono discontinue anche topologicamente.

Dafne → Alloro: la ninfa ha una topologia approssimativamente sferica con piccole complicazioni; l'alloro ha una topologia arborescente (grafo), radicalmente diversa. Non c'è omeomorfismo possibile.

Licaone → Lupo: entrambi sono mammiferi quadrupedi, quindi la topologia grossolana potrebbe essere simile (approssimativamente, entrambi sono tori con appendici). Ma i dettagli (mani vs zampe, postura) differiscono. Questa metamorfosi è *più vicina* a un omeomorfismo rispetto a Dafne → Alloro.

Teorie di gauge e simmetrie nascoste delle metamorfosi

Nella fisica teorica, le *teorie di gauge* descrivono come certe proprietà fisiche rimangono invarianti sotto trasformazioni locali. Possiamo applicare questa idea alle metamorfosi: esistono "simmetrie nascoste" che rimangono invarianti anche quando la forma apparente cambia drasticamente.

Definiamo un *fibrato principale* P → **Mit** dove la fibra sopra ogni oggetto X è il gruppo di automorfismi interni Aut_interno(X). Una connessione su questo fibrato specifica come "trasportare parallelo" le identità attraverso le metamorfosi.

Una metamorfosi μ: X → Y induce una mappa tra fibre: μ*: Aut_interno(X) → Aut_interno(Y). Le proprietà che commutano con tutti gli automorfismi interni (che sono nel *centro* del gruppo di automorfismi) sono invarianti gauge e dovrebbero essere preservate dalla metamorfosi.

Per Io: alcuni aspetti della sua identità profonda (il centro del suo gruppo di automorfismi interni) sono preservati attraverso la trasformazione in giovenca. Questi aspetti "gauge-invarianti" costituiscono l'essenza che persiste.

Questa formulazione matematicamente avanzata cattura l'intuizione che c'è una "struttura profonda" dell'identità che trascende le apparenze superficiali, e che le metamorfosi possono modificare le apparenze senza toccare questa struttura profonda, quando sono metamorfosi che preservano identità.

Conclusioni filosofiche e prospettive contemporanee

La matematica come linguaggio dell'essenziale

L'applicazione della teoria delle categorie e della topologia alle metamorfosi mitologiche non è un mero esercizio formale, ma rivela una profonda consonanza tra strutture matematiche e strutture narrative-simboliche. La matematica offre un linguaggio per articolare con precisione intuizioni che la narrativa poetica esprime in forma immaginativa.

Ovidio, descrivendo le metamorfosi con straordinaria sensibilità poetica, ha intuitivamente colto strutture che la matematica del XX e XXI secolo ha formalizzato: la distinzione tra trasformazioni reversibili e irreversibili (isomorfismi vs morfismi generali), la preservazione di proprietà essenziali attraverso il cambiamento (invarianti), la dipendenza causale tra stati successivi (composizione di morfismi), la periodicità di certe trasformazioni (azioni di gruppi ciclici).

Questa consonanza suggerisce che tanto la matematica quanto la mitologia attingono a strutture profonde del pensiero umano sulla natura del cambiamento, dell'identità e della permanenza. Le categorie matematiche non sono imposte artificialmente sui miti, ma emergono naturalmente quando cerchiamo di rendere esplicite le strutture logiche implicite nelle narrazioni mitologiche.

Il problema dell'identità nel mondo contemporaneo

Le questioni filosofiche sollevate dalle metamorfosi ovidiane rimangono urgentemente rilevanti nel contesto contemporaneo. La domanda "cosa rende un ente lo stesso ente attraverso trasformazioni radicali?" è oggi posta in contesti nuovi:

Identità di genere e transizioni: Le persone transgender che attraversano transizioni mediche subiscono trasformazioni corporee significative. La società deve riconoscere che l'identità di genere (l'equivalente dell'anima o psiche nella metafora mitologica) persiste attraverso la trasformazione corporea. Il dibattito riflette esattamente le questioni categoriali esaminate: quale funtore di identità applichiamo? Quello basato sulla biologia (essenzialismo biologico) o quello basato sulla continuità psicologica (identità psicologica)?

Upload mentale e continuità digitale: Il transumanesimo e la fantascienza contemporanea esplorano l'ipotesi di "caricare" la mente umana su un substrato computazionale. Se la coscienza e la memoria di una persona vengono trasferite da un cervello biologico a un computer, è ancora la stessa persona? Questa è esattamente la struttura della metempsicosi, reinterpretata tecnologicamente: una "anima" (pattern informazionale) che passa da un "corpo" (substrato biologico) a un altro "corpo" (substrato digitale). Le questioni categoriali di preservazione di identità, kernel e cokernel della trasformazione, sono identiche.

Teletrasporto e il problema della continuità: Il famoso esperimento mentale del teletrasporto (una macchina distrugge il corpo in un luogo A e ricostruisce una copia atomicamente identica in un luogo B) è il problema della nave di Teseo portato all'estremo. È la stessa persona o una copia? La formalizzazione categoriale suggerisce che la risposta dipende dalla nostra definizione di identità: se definiamo l'identità attraverso continuità spazio-temporale (un percorso continuo γ: [0,1] → **Spazio-tempo**), allora il teletrasporto distrugge l'identità perché il percorso è discontinuo. Se definiamo l'identità attraverso isomorfismo strutturale (due configurazioni sono identiche se sono isomorfe), allora l'identità è preservata.

Demenza e neurodegenerazione: Una persona con Alzheimer avanzato che ha perso la maggior parte dei ricordi e della personalità è ancora la "stessa persona"? Qui abbiamo un endorfismo continuo f_t: Persona → Persona dove il tempo t aumenta progressivamente l'alterazione. A quale punto f_t smette di essere un automorfismo (trasformazione che preserva identità) e diventa un morfismo che produce un oggetto diverso? La questione è tanto filosofica quanto pratica (ad esempio, per questioni di consenso medico e riconoscimento legale).

Metamorfosi digitali e identità virtuale

Nell'era digitale, le metamorfosi assumono forme nuove. Gli avatar nei mondi virtuali, le intelligenze artificiali che evolvono, i filtri fotografici che trasformano l'apparenza: tutte queste sono forme di metamorfosi tecnologica.

Gli *avatar* sono metamorfosi volontarie e reversibili: un utente può assumere qualsiasi forma in un mondo virtuale (umano, animale, oggetto fantastico) e ritornare alla forma originale. Questa è esattamente la struttura della licantropia volontaria o delle trasformazioni divine: un'azione del gruppo di automorfismi sotto il controllo dell'agente. La categoria rilevante è:

Avatar: con oggetti = {forme virtuali possibili} e morfismi = {transizioni tra forme}

Le *reti neurali* che generano immagini (come i modelli di diffusione) operano metamorfosi nello spazio delle immagini: dato un'immagine di input, la trasformano secondo un prompt. Questo è un funtore:

F_prompt: **Immagini** → **Immagini**

dove il prompt specifica la natura del funtore. "Trasforma questa foto in stile Van Gogh" definisce un particolare funtore F_VanGogh che preserva la struttura compositiva (posizione degli elementi, relazioni spaziali) ma trasforma lo stile pittorico.

Le *intelligenze artificiali* che apprendono ed evolvono subiscono una forma di metempsicosi algoritmica: ogni versione del modello è una "incarnazione" diversa, ma c'è un filo di continuità (l'architettura, i dati di training incrementali) che unifica le versioni successive. GPT-3 → GPT-4 → GPT-5 è una catena di morfismi dove ogni versione è una trasformazione della precedente, preservando alcune capacità mentre ne acquisisce di nuove.

Bioetica delle trasformazioni corporee

La medicina contemporanea offre possibilità crescenti di trasformazione corporea: chirurgia plastica, protesi avanzate, interfacce cervello-computer, terapie geniche. Ognuna di queste solleva questioni etiche che sono formalmente analoghe a quelle delle metamorfosi mitologiche:

Chirurgia plastica estrema: Quando le modifiche corporee sono così estese che l'aspetto fisico è radicalmente alterato, quali aspetti dell'identità sono preservati e quali persi? Il kernel della trasformazione (ciò che viene perso) include l'apparenza originale; l'immagine (ciò che è preservato in forma modificata) include la struttura ossea sottostante, la proporzione generale; il cokernel (ciò che è aggiunto) include nuove caratteristiche estetiche. La persona è "ancora sé stessa"? Secondo quale criterio?

Protesi neurali e cognitive: Gli impianti cerebrali che aumentano la memoria o le capacità cognitive operano una trasformazione delle facoltà mentali. Se un impianto aumenta drasticamente l'intelligenza di una persona, è ancora la stessa persona? Questa è la questione degli endorfismi nella categoria **Mente**: quando un endorfismo f: M → M' (dove M' è la mente potenziata) preserva abbastanza struttura da mantenere l'identità?

Terapie geniche germinali: Modificare il genoma di embrioni crea esseri umani con caratteristiche biologiche alterate. Questo è un morfismo applicato prima ancora che l'oggetto (la persona futura) esista pienamente: una metamorfosi *a priori*. Le questioni etiche riguardano quali trasformazioni sono permissibili e quali violano l'integrità della natura umana.

Verso una ontologia categoriale generale

Le riflessioni sviluppate in questo trattato suggeriscono la possibilità di un'*ontologia categoriale generale*: un framework filosofico che descrive la realtà in termini di oggetti,

morfismi, funtori e trasformazioni naturali, piuttosto che in termini di sostanze, attributi e relazioni (come nell'ontologia aristotelica tradizionale).

In un'ontologia categoriale:

- Gli *enti* sono oggetti in categorie appropriate
- Le *trasformazioni* sono morfismi tra oggetti
- Le *leggi naturali* sono funtori che preservano certe strutture
- Gli *schemi universali* sono trasformazioni naturali tra funtori

Questa ontologia cattura meglio il dinamismo della realtà: il fatto che tutto è in trasformazione, che l'identità non è statica ma processuale, che le proprietà essenziali sono quelle che rimangono invarianti sotto classi di trasformazioni (definite matematicamente). La mitologia ovidiana, con la sua insistenza sulla universalità della metamorfosi ("omnia mutantur, nihil interit" - tutto cambia, nulla perisce), anticipa questa visione dinamica. La teoria delle categorie offre gli strumenti formali per articolarla rigorosamente.

Metamorfosi come condizione ontologica universale

La tesi radicale che emerge da questo studio è che la metamorfosi non è un'eccezione miracolosa alla normalità ontologica, ma è piuttosto la *condizione ontologica universale*. Ogni ente è sempre già in trasformazione. Ciò che chiamiamo "identità" è in realtà un *invariante categoriale*: una struttura che persiste attraverso morfismi. Nel mondo naturale:

- Le cellule del corpo umano sono completamente sostituite ogni 7-10 anni (nave di Teseo biologica)
- Le particelle quantistiche esistono in sovrapposizioni e subiscono collassi di funzione d'onda (metamorfosi quantistiche)
- Le stelle nascono da nebulose, bruciano, e collassano in nane bianche, stelle di neutroni o buchi neri (metamorfosi stellari)
- Le specie evolvono attraverso generazioni (metamorfosi filogenetica)

Nel mondo sociale:

- Le persone cambiano continuamente opinioni, credenze, desideri (metamorfosi psicologica)
- Le società trasformano le proprie istituzioni e valori (metamorfosi culturale)
- Le tecnologie emergono, si sviluppano, diventano obsolete (metamorfosi tecnologica)

La stabilità è un'illusione creata dalla lentezza relativa di certe trasformazioni rispetto alla scala temporale umana. Gli dèi olimpici sembrano stabili perché la loro scala temporale è immensa; in realtà, anche gli dèi "invecchiano" in senso mitologico (i Titani sono sostituiti dagli Olimpi, che potrebbero essere sostituiti a loro volta).

L'etica della metamorfosi

Se la metamorfosi è universale, quali sono le implicazioni etiche? Possiamo delineare alcuni principi:

1. Rispetto dell'identità narrativa: Anche se la forma fisica cambia, dovremmo preservare la continuità narrativa delle persone. La storia di una persona, i suoi ricordi, le sue relazioni, costituiscono l'invariante categoriale che definisce la sua identità. Trasformazioni che distruggono questa continuità (ad esempio, cancellazione forzata della memoria) sono violazioni etiche gravi perché annientano l'identità personale.

2. Autonomia nelle trasformazioni: Le metamorfosi volontarie (chirurgia estetica, transizione di genere, potenziamento cognitivo) sono eticamente diverse dalle metamorfosi imposte. Il morfismo di volizione v: **Stati_mentali** → Aut(Corpo) dovrebbe essere sotto il controllo dell'individuo. Imposizioni esterne (come le mutilazioni genitali forzate, le lobotomie, le sterilizzazioni coatte) sono violazioni etiche perché negano l'autonomia.

3. Preservazione delle capacità essenziali: Trasformazioni che eliminano capacità fondamentali (razionalità, comunicazione, relazionalità) senza consenso o necessità sono eticamente problematiche. Il kernel di una trasformazione etica dovrebbe essere minimizzato: dovremmo preservare quante più capacità possibile.

4. Giustizia nella distribuzione delle metamorfosi: Se le tecnologie metamorfiche (enhancement cognitivo, estensione della vita, modifiche corporee) sono accessibili solo ai ricchi, creano una stratificazione ontologica: una classe di "post-umani" potenziati e una classe di "umani baseline". Questo riproduce su scala tecnologica la distinzione mitologica tra dèi (esseri superiori) e mortali (esseri inferiori), con tutte le ingiustizie che ne conseguono.

5. Reversibilità prudenziale: Quando possibile, le trasformazioni dovrebbero essere progettate per essere reversibili o almeno parzialmente reversibili. Gli isomorfismi sono eticamente preferibili ai morfismi irreversibili, perché preservano l'autonomia futura: la possibilità di "tornare indietro" se la trasformazione si rivela indesiderata. Le metamorfosi ovidiane sono tragiche proprio perché irreversibili: Dafne non può mai cessare di essere alloro, Atteone non può sfuggire ai propri cani. Le nostre tecnologie dovrebbero evitare questa tragicità quando possibile.

6. Consenso informato attraverso le trasformazioni: Prima di una metamorfosi significativa, l'individuo dovrebbe comprendere quali proprietà saranno nel kernel (perse), quali nell'immagine (trasformate), e quali nel cokernel (acquisite ex novo). Questo richiede una "matematica dell'autodeterminazione": la capacità di mappare formalmente le conseguenze delle trasformazioni.

La bellezza matematica del mito

Uno degli aspetti più sorprendenti emersi da questo studio è la bellezza intrinseca delle strutture categoriali che emergono dalla mitologia. I diagrammi commutativi, le sequenze esatte, le trasformazioni naturali non sono costrutti artificiali imposti sui miti, ma pattern che emergono naturalmente quando formalizziamo le intuizioni poetiche di Ovidio. Questa consonanza tra matematica e mito suggerisce una verità profonda: tanto l'una quanto l'altro sono linguaggi che l'umanità ha sviluppato per comprendere e articolare strutture universali del reale e dell'esperienza. La matematica offre precisione e rigore; il mito offre concretezza immaginativa e risonanza emotiva. Insieme, illuminano aspetti complementari della stessa realtà. Le Metamorfosi di Ovidio non sono solo un capolavoro letterario, ma anche un

trattato implicito sulla natura del cambiamento, dell'identità e della permanenza. La teoria delle categorie non è solo un ramo astratto della matematica, ma uno strumento per pensare filosoficamente i processi fondamentali dell'essere. Nel libro XV delle Metamorfosi, Pitagora proclama: "Omnia mutantur, nihil interit" - tutto cambia, nulla perisce. Questa affermazione apparentemente paradossale trova nella teoria delle categorie una risoluzione elegante. In una categoria, i morfismi trasformano oggetti, ma la struttura categoriale stessa è conservata. Le leggi di composizione, le identità, i funtori che preservano strutture: tutto questo permane anche quando gli oggetti individuali si trasformano. Ciò che "non perisce" non è la sostanza materiale degli enti (che cambia continuamente), ma la struttura delle relazioni e delle trasformazioni. Nel linguaggio categoriale: gli oggetti mutano (subiscono morfismi), ma la categoria stessa - lo spazio delle possibilità ontologiche e delle trasformazioni - rimane. L'essere non è una sostanza statica ma una struttura dinamica di trasformazioni possibili. La metamorfosi non è la negazione dell'essere ma la sua realizzazione più completa. Ovidio, poeta augusteo, e Eilenberg-Mac Lane, matematici del XX secolo, convergono in questa intuizione profonda: il reale è processuale, relazionale, trasformativo. L'identità non è sostanza che persiste immutabile, ma pattern che si preserva attraverso il flusso del cambiamento. Le metamorfosi mitologiche, lungi dall'essere fantasie arbitrarie, sono esperimenti mentali sulla natura dell'identità e del cambiamento. La teoria delle categorie non sostituisce la poesia con l'algebra, ma offre un metalinguaggio che rivela la profondità filosofica celata nelle immagini mitiche. In definitiva, questo contributo propone una tesi radicale: **la mitologia è matematica implicita, e la matematica è mitologia esplicita**. Entrambe sono tentativi umani di cogliere e articolare le strutture fondamentali della realtà e dell'esperienza. La loro convergenza nelle pagine di questo studio non è coincidenza, ma rivelazione di un'unità più profonda del pensiero umano.

Bibliografia essenziale

- Ovidio, *Metamorphoseon libri* (I secolo d.C.)
- Eilenberg, S. & Mac Lane, S., "General Theory of Natural Equivalences", *Transactions of the American Mathematical Society* (1945)
- Lawvere, F. W., "Functorial Semantics of Algebraic Theories", *Proceedings of the National Academy of Sciences* (1963)
- Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician* (1971)
- Parfit, D., *Reasons and Persons* (1984) - sulla persistenza dell'identità personale
- Ricoeur, P., *Soi-même comme un autre* (1990) - sull'identità narrativa
- Badiou, A., *L'Être et l'événement* (1988) - ontologia categoriale
- Thom, R., *Stabilité structurelle et morphogenèse* (1972) - teoria delle catastrofi